Derivate parziali seconde

Ordine di derivazione

Teorema 1 (Teorema di Schwarz). *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte su Ω. Se per una coppia di indici $1 \le i \le d$ e $1 \le j \le d$ le derivate parziali $\partial_{ij}u$ e $\partial_{ji}u$ sono continue nel punto $X_0 \in \Omega$, allora*

$$\partial_{ij}u(X_0) = \partial_{ji}u(X_0).$$

Dimostrazione in dimensione due. Supponiamo che $d = 2$ e $X_0 = (x, y)$.
Per ogni $h, k \in \mathbb{R}$, consideriamo l'espressione

$$u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y).$$

Fissati y e k, la funzione

$$f(t) = u(t, y+k) - u(t, y)$$

è derivabile in t ed esiste $h' \in (0, h)$ tale che

$$\begin{aligned} u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y) &= f(x+h) - f(x) \\ &= hf'(x+h') \\ &= h\Big(\partial_x u(x+h', y+k) - \partial_x u(x+h', y)\Big). \end{aligned}$$

Utilizzando di nuovo il teorema di Lagrange, si ha

$$\partial_x u(x+h', y+k) - \partial_x u(x+h', y) = k\, \partial_y \partial_x u(x+h', y+k'),$$

per un qualche $k' \in (0, k)$. Quindi

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y)}{hk} = \partial_y \partial_x u(x, y).$$

Ora, fissiamo x e k e consideriamo la funzione

$$g(s) = u(x+h, s) - u(x, s).$$

Ora, per ogni k, esiste $k'' \in (0, k)$ tale che

$$\begin{aligned} u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y) &= g(y+k) - g(y) \\ &= k\, g'(y+k'') \\ &= k\Big(\partial_y u(x+h, y+k'') - \partial_y u(x, y+k'')\Big). \end{aligned}$$

Come sopra, esiste $h'' \in (0, h)$ tale che

$$\partial_y u(x+h, y+k'') - \partial_y u(x, y+k'') = h\, \partial_x \partial_y u(x+h'', y+k''),$$

Quindi, per la continuità di $\partial_x \partial_y u$, si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y)}{hk} = \partial_x \partial_y u(x, y).$$

□

Sviluppo di Taylor al secondo ordine

Teorema 2 (Teorema di Taylor - ordine 2)**.** *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\Omega)$. Allora*

$$F(X)=F(X_0)+\sum_{i=1}^d \partial_i F(X_0)\big(X^i-X_0^i\big)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \partial_{ij}F(X_0)\big(X^i-X_0^i\big)\big(X^j-X_0^j\big)+o\big(|X-X_0|^2\big).$$

Dimostrazione in dimensione due. Useremo la notazione $X=(x,y)$ e $X_0=(x_0,y_0)$. Inoltre, senza perdità di generalità, possiamo supporre che $(x_0,y_0)=(0,0)$. Ora, siccome le funzioni

$$\partial_x F:\Omega\to\mathbb{R}\qquad \text{e}\qquad \partial_y F:\Omega\to\mathbb{R}$$

sono di classe C^1, abbiamo

$$\begin{aligned}\partial_x F(x,y)&=\partial_x F(0,0)+(x,y)\cdot\nabla(\partial_x F)(0,0)+\varepsilon_1(x,y),\\ \partial_y F(x,y)&=\partial_y F(0,0)+(x,y)\cdot\nabla(\partial_y F)(0,0)+\varepsilon_2(x,y),\end{aligned}$$

dove

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\qquad \text{e}\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon_2(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0. \tag{1}$$

Ora, fissiamo (x,y) in intorno di $(0,0)$ e calcoliamo

$$\begin{aligned}F(x,y)-F(0,0)&=\int_0^1 (x,y)\cdot\nabla F(sx,sy)\,ds\\ &=\int_0^1 x\,\partial_x F(sx,sy)\,ds+\int_0^1 y\,\partial_y F(sx,sy)\,ds\\ &=\int_0^1 x\Big(\partial_x F(0,0)+sx\partial_{xx}F(0,0)+sy\partial_{yx}F(0,0)+\varepsilon_1(sx,sy)\Big)\,ds\\ &\qquad+\int_0^1 y\Big(\partial_y F(0,0)+sx\partial_{xy}F(0,0)+sy\partial_{yy}F(0,0)+\varepsilon_2(sx,sy)\Big)\,ds\\ &=(x,y)\cdot\nabla F(0,0)+\frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix}\partial_{xx}F(0,0) & \partial_{yx}F(0,0)\\ \partial_{xy}F(0,0) & \partial_{yy}F(0,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\ &\qquad+\int_0^1\Big(x\varepsilon_1(sx,sy)+y\varepsilon_2(sx,sy)\Big)\,ds.\end{aligned}$$

Quindi basta verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x^2+y^2}\int_0^1\Big(x\varepsilon_1(sx,sy)+y\varepsilon_2(sx,sy)\Big)\,ds=0.$$

Usando (1) abbiamo che per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che:

$$\sqrt{x^2+y^2}<\delta\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\varepsilon_j(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}<\varepsilon.$$

Di conseguenza, per $j=1,2$ e per ogni $s>0$, abbiamo

$$\sqrt{x^2+y^2}<\delta\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\varepsilon_j(sx,sy)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{s\,\varepsilon_j(sx,sy)}{\sqrt{(sx)^2+(sy)^2}}<s\varepsilon.$$

Quindi, per $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$, si ha che

$$\frac{1}{x^2+y^2}\int_0^1\Big(x\varepsilon_1(sx,sy)+y\varepsilon_2(sx,sy)\Big)\,ds<\varepsilon,$$

il che conclude la dimostrazione. $\square$